

# مروری بر روش‌های تعیین تنش تماسی در چرخ‌دنده‌های پایه پلیمری

رسول محسن‌زاده\*

تهران، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، گروه مهندسی مکانیک.

## چکیده ...

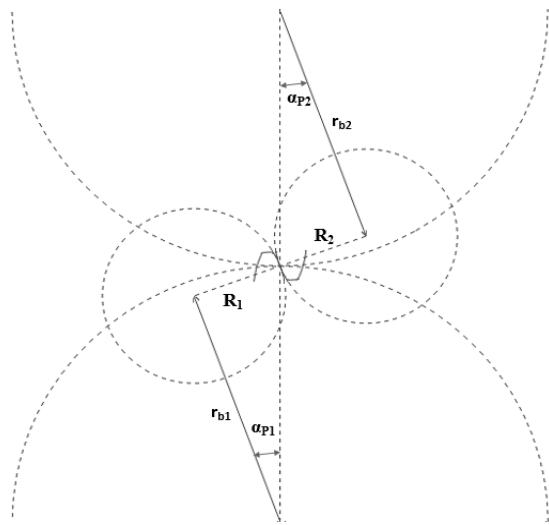
اساساً چرخ‌دنده‌ها، شکل تکامل‌یافته چرخ‌های اصطکاکی هستند که برای جلوگیری از لغزش و اطمینان از یکنواختی حرکت نسبی، دندانه به آن‌ها اضافه شده است. استفاده از چرخ‌دنده‌های پلیمری به دلیل مزایایی همچون مقاومت خوردگی، قابلیت قالب‌گیری تزریقی، عملکرد بدون روانکار و صدای کم رو به افزایش است. با این وجود، استحکام مکانیکی، مقاومت حرارتی و دوام در چرخ‌دنده‌های پلیمری نسبت به چرخ‌دنده‌های فلزی کمتر است. سازوکار و اماندگی در چرخ‌دنده‌های فلزی متفاوت با چرخ‌دنده‌های پلیمری است. از جمله آسیب‌های مهم که منجر به و اماندگی چرخ‌دنده‌های پلیمری می‌شود، تغییر شکل حرارتی است که این نوع و اماندگی در چرخ‌دنده‌های فلزی وجود ندارد. در چرخ‌دنده‌های پلیمری، به دلیل ماهیت گرانش‌کشسان و پلاستیک پلیمرها، در طی درگیری دنده‌ها حرارت زیادی ایجاد شده و دما افزایش می‌یابد. افزایش دما باعث نرم شدن دنده‌ها و در نتیجه تغییر شکل آن‌ها می‌شود. گودشدگی، خستگی و سایش از دیگر عواملی هستند که منجر به و اماندگی چرخ‌دنده‌های پلیمری می‌شوند. تنش تماسی حاصل از گشتاور اعمالی به چرخ‌دنده، مهم‌ترین نقش در شدت هر کدام از و اماندگی‌های اشاره‌شده را ایفا می‌کند. بررسی تنش تماسی در چرخ‌دنده‌های پلیمری از جمله چالش‌های صنعت‌گران و محققان برای دریافت درک بهتری برای طراحی هر چه بهتر این نوع چرخ‌دنده‌ها و همچنین پیش‌بینی عمر را حاصل خواهد کرد. این پژوهش مروری بر انواع روش‌های تعیین و بررسی تنش تماسی اعم از مدل عددی هر تزی، روش استاندارد و روش المان محدود است.

## واژه‌های کلیدی:

چرخ‌دنده پلیمری،  
تنش تماسی،  
مدل هر تزی،  
المان محدود

\*پست الکترونیکی مسئول مکاتبات:

r\_mohsenzadeh@tvu.ac.ir



شکل ۱ شعاع انحناي دو استوانه فرضي در تنش هرترز.

تماس یک نقطه بوده و زمانی که دو استوانه با هم درگیر باشند سطح تماس خط است. در هر دو حالت، با توجه به اینکه سطح درگیری بی‌نهایت کوچک است، تنش تماسی بی‌نهایت بزرگ خواهد بود و در نتیجه در همان آغاز درگیری، هر دو جسم دچار تسلیم می‌شوند. ولی در عمل چنین نیست. با توجه خاصیت الاستیک ماده، جسم در محل درگیری تغییر شکل داده، سطحی غیر از نقطه و خط ایجاد می‌شود. بنابراین تنش تماسی محدود شده و جسم دچار تسلیم نخواهد شد. این تنش محدود شده در محل درگیری، تنش هرترز گفته می‌شود [۱۲]. درگیری دو چرخ دنده خارجی ساده را می‌شود به مانند دو استوانه شعاع انحناي  $R_1$  و  $R_2$  مدل کرد [۱۲]. شکل ۱، مدل دو استوانه فرضی برای حصول دو دنده را نشان می‌دهد. بیشینه تنش تماسی ( $\sigma_H$ ) با استفاده از روابط ۱ تا ۵، حاصل می‌شود. در این روابط، پهنای دنده ( $b$ )، نیروی تماسی ( $N$ ) دو استوانه با شعاع انحنا ( $R_1$  و  $R_2$ )، گشتاور ( $T$ )، شعاع گام ( $r_p$ )، نسبت درگیری ( $u$ )، فاصله محوری ( $a$ )، ضریب پواسون ( $\nu$ )، مدول یانگ ( $E$ ) و  $K_1$  ثابت‌های ماده هستند [۱۲].

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{N}{\pi(K_1 + K_2)b} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad (1)$$

$$N = \frac{2000T}{d_w} \quad (2)$$

$$d_w = \frac{2a}{u + 1} \quad (3)$$

## ۱ مقدمه

یکی از اصلی‌ترین روش‌های انتقال نیرو میان اجسام، تماس است. اگر دو جسم با سطوح خمیده را به یکدیگر بفشاریم، آن دو در یک نقطه یا در امتداد یک خط تماس، با همدیگر در تماس قرار می‌گیرند و در اثر اعمال نیروهای فشاری تنش‌های سه‌بعدی در دو جسم درگیر گسترش می‌یابد [۱]. مسائل تنش‌های تماسی در محدوده وسیعی از کاربردهای مهندسی مانند تماس بین دندان‌های درگیر چرخ‌دنده‌ها، یاتاقان‌های غلتشی، غلتک‌های نورد و تماس چرخ یک واگن با ریل قابل طرح و تحلیل است [۲،۳]. نخستین بار هرترز در سال ۱۴۴۲ موضوع تماس بین اجسام ساده را مورد بحث و بررسی قرار داد و بر این اساس نظریه خود را برای تماس بین دو کره و دو استوانه در حالت کشسان بسط و گسترش داد [۴].

با پیشرفت صنایع و پا به عرصه گذاشتن پلاستیک‌ها، ساخت چرخ‌دنده از پلیمر نیز توسعه یافت. مقاومت خوردگی، قابلیت قالب‌گیری تزریقی، عملکرد بدون روانکار و صدای کم از جمله مزایای چرخ‌دنده‌های پلیمری است. یکی از معیارهای اصلی در طراحی چرخ‌دنده‌ها، کمینه کردن تنش‌های تماسی ایجاد شده در سطوح دندان‌های درگیر است. وجود تنش‌های تماسی عمدتاً موجب خرابی سطوح دندان‌ها می‌شود و به‌طور عمومی اثر آن را سایش می‌نامند [۵-۷]. علاوه بر این، گودشدگی دیگر عامل واماندگی در چرخ‌دنده‌های پلیمری است. گودشدگی عبارتست از شکست خستگی حاصل از تنش‌های تماسی که باعث می‌شود قسمت‌هایی از سطح دندان‌ها چرخ‌دنده به‌صورت حفره کنده شود [۸،۹]. گودشدگی باعث افزایش صدای درگیری دو چرخ‌دنده شده و اگر ادامه پیدا کند به ریزترک تبدیل شده و از پیوستن ریزترک‌ها به همدیگر ترک ایجاد شده و در نهایت شکست در دنده رخ می‌دهد [۱۰،۱۱]. بنابراین، بررسی تنش تماسی درک بهتری را برای طراحی هر چه بهتر این نوع چرخ‌دنده‌ها به دست خواهد داد. در ادامه به مرور روش‌های محاسبه تنش تماسی در دنده چرخ‌دنده‌های پلیمری اشاره خواهد شد.

## ۲ تعیین تنش تماسی در دنده چرخ‌دنده

### ۲-۱ تعیین تنش تماسی با استفاده از رابطه عددی هرترز

زمانی که دو سطح منحنی‌دار اعم از کره یا استوانه یا سطح منحنی‌داری با صفحه در تماس باشند، تنش تماسی ایجاد می‌شود. صفحه، کره‌ای با شعاع نامحدود در نظر گرفته می‌شود. زمانی که دو کره باهم در تماس باشند، در حالت نظری، سطح

تماس با همدیگر بوده و با استفاده از روابط ۷ تا ۹ قابل محاسبه است [۱۶].

$$C_r = \frac{L}{P_b} \quad (7)$$

$$L = \sqrt{(r_{o2}^2 - r_{b2}^2) + (r_{o1}^2 - r_{b1}^2) - (r_{p1} + r_{p2}) \cdot \sin \alpha_p} \quad (8)$$

$$P_b = m \times \pi \times \cos \alpha_p \quad (9)$$

در روابط بالا  $r_{p1}$ ،  $r_{b1}$ ،  $r_{o1}$  به ترتیب شعاع سردنده، ریشه و شعاع دایره گام (اندیس ۱ نشان دهنده محرک است)،  $\alpha_p$  زاویه فشار،  $L$  طول درگیری و  $P_b$  گام ریشه دنده را نشان می‌دهد. مقدار نیروی اعمالی به دنده‌ها، وابسته به نسبت درگیری و زاویه درگیری (موقعیت نقطه درگیری) است. زاویه درگیری  $\alpha_A$ ، برابر با مجموع زاویه رفت  $\alpha_a$ ، و زاویه برگشت  $\alpha_r$ ، بوده و متناسب با طول درگیری، طبق معادلات ۱۰ تا ۱۴ تعریف می‌شود [۱۷].

در روابط زیر، SAO، طول مسیر شروع درگیری تا خط گام و SBO، طول مسیر درگیری از خط گام تا انتهای درگیری است.

$$\alpha_A = \alpha_a + \alpha_r \quad (10)$$

$$\alpha_a = \frac{S_{AO}}{r_{b1}} \quad (11)$$

$$S_{AO} = -r_{b2} \times \tan \alpha_p + (r_{o2}^2 - r_{b2}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$\alpha_r = \frac{S_{BO}}{r_{b1}} \quad (13)$$

$$S_{BO} = -r_{b1} \times \tan \alpha_p + (r_{o1}^2 - r_{b1}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

محسن زاده و همکاران برای بررسی توزیع تنش و همچنین مقدار بیشینه تنش تماسی چرخ‌دنده‌های پلیمری خالص و نانوکامپوزیتی، از روش المان محدود استفاده کردند [۱۸]. تجزیه و تحلیل المان محدود خطی دوبعدی برای چرخ‌دنده‌های مورد آزمون با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس انجام گرفت. شرایط مرزی اعم از بارگذاری در مرکز چرخ‌دنده

$$K_i = \frac{I - \nu_i^2}{E_i} \quad (4)$$

$$R_i = r_{pi} \cdot \sin \alpha_{pi} \quad (5)$$

محسن زاده و همکاران از مدل هرتز برای یافتن تنش تماسی بیشینه در چرخ‌دنده‌های پلی‌استال خالص و چرخ‌دنده‌های نانوکامپوزیتی پلی‌استال-دوده استفاده کردند. آن‌ها از نتایج به‌دست آمده از مدل هرتز برای تخمین عمر و ترسیم نمودار تنش-عمر استفاده کردند [۱۳]. محسن زاده در پژوهشی دیگر، برای تعیین تنش تماسی بیشینه در چرخ‌دنده‌های پلیمری خالص و تقویت‌شده با استفاده از نانوذرات کلسیم کربنات، از مدل هرتز استفاده کرد [۱۴]. سوکوماران و همکاران، برای تعیین تنش تماسی و توزیع تنش در نقاط مختلف درگیری چرخ‌دنده‌های پلی‌آمید، از دو دیسک با شعاع انحنا منطبق بر نقاط درگیری استفاده کردند. آن‌ها برای یافتن تنش تماسی در شعاع انحنا معین، از مدل هرتز استفاده کردند [۱۵].

## ۲-۲ تعیین تنش تماسی با استفاده از استاندارد

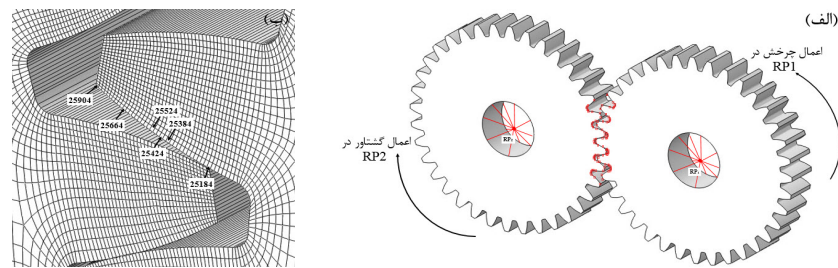
علاوه بر روابط هرتز، می‌توان از استاندارد AGMA 2101-C95، برای پیدا کردن تنش تماسی در دنده چرخ‌دنده استفاده کرد. این روش از رابطه ۶، برای پیدا کردن تنش تماسی استفاده می‌شود.

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{F_T K_O K_v K_S \frac{K_H}{2r_f W Z_I}} \quad (6)$$

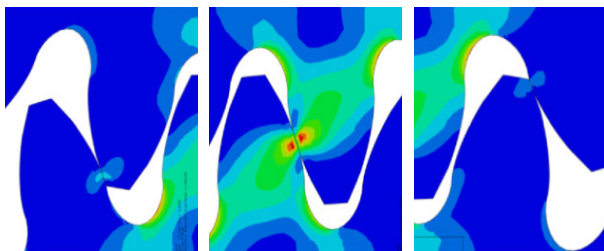
در رابطه ۶،  $Z_E$  و  $F_T$  بیانگر به‌ترتیب، ضریب الاستیک و نیروی عمود وارد بر دنده است. علاوه بر این،  $K_O$ ،  $K_v$ ،  $K_S$  و  $K_H$  به ترتیب معرف عامل اضافه بار، عامل دینامیک، عامل اندازه و عامل توزیع بار است. افزون بر این،  $Z_I$  و  $r_f$ ،  $W$  به ترتیب نشان‌دهنده شعاع دایره، گام چرخ‌دنده محرک، پهنای دنده و عامل مقاومت هندسی در مقابل گودشدگی است.

## ۳-۲ تعیین تنش تماسی با استفاده از روش المان محدود

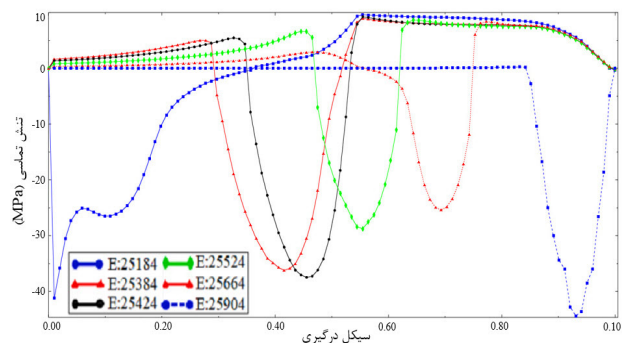
روش المان محدود، روشی برای تحلیل رفتار سازه‌های تحت بار از جمله چرخ‌دنده است. از مزایای روش المان محدود برای یافتن تنش تماسی در دنده چرخ‌دنده، می‌توان به محاسبه تنش در تمام نقاط درگیری و همچنین کاهش خطا نسبت به روش‌های محاسباتی عددی برشمرد. برای اعمال شرایط مرزی همچون جابه‌جایی و اعمال نیرو، محاسبه نسبت تماس و زاویه درگیری دو چرخ‌دنده ضروری است. نسبت تماس ( $C_R$ )، میانگین دندانه‌هایی هست که همزمان در



شکل ۲ الف) شرایط مرزی مدل المان محدود، ب) نوع مش بندی دنده چرخ دنده [۱۸].



شکل ۴ نحوه درگیری جفت دنده در موقعیت‌های متفاوت [۲۱].



شکل ۳ تنش تماسی برای المان‌های متفاوت [۲۰].

(شکل ۳). ایشان علاوه بر توزیع تنش در سطح دنده، بلکه توزیع تنش در پهنای دنده و در راستای خط فشار مورد بررسی قرار داد [۲۰].

لی و همکاران [۲۱]، توزیع تنش در سه نقطه درگیری (ابتدای درگیری، میانه درگیری و انتهای درگیری)، مطابق شکل ۴، برای چرخ‌دنده‌های استالی و نایلونی با شرایط درگیری هم‌جنس و غیرهم‌جنس و همچنین تغییر موقعیت چرخ‌دنده‌ها از نظر محرک و متحرک، با استفاده از روش المان مورد بررسی قرار دادند. نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل المان محدود پژوهش اشاره شده در جدول ۱ آورده شده است. علاوه‌براین، آن‌ها با اعمال تغییر در هندسه دنده چرخ‌دنده‌ها، تغییرات تنش را مورد

محرک و نوع درگیری با توجه به شرایط اعمالی در آزمون چرخ‌دنده عملی به مدل المان محدود اعمال شد و در شکل ۲ ارائه شده است. آن‌ها برخلاف ادعای مدل هرترز و استاندارد، دریافتند که بیشینه تنش تماسی در خط گام رخ نمی‌دهد بلکه در ناحیه پایین خط گام ظاهر می‌شود. علاوه‌براین محسن‌زاده و همکاران، با تعیین توزیع تنش در چرخ‌دنده‌های پلیمری، منجر به ایجاد رابطه بین نتایج المان محدود و نتایج تجربی چرخ‌دنده در رابطه با واماندگی چرخ‌دنده شدند [۱۹]. محسن‌زاده در تحقیقی دیگر، توزیع تنش در ۱۱ نقطه درگیری برای چرخ‌دنده پلی‌استال خالص با استفاده از روش المان محدود تعیین کرد

جدول ۱- نتایج بیشینه تنش تماسی در موقعیت‌های مختلف درگیری برای چرخ‌دنده‌های متفاوت [۲۱].

مواد چرخ‌دنده		بیشینه تنش تماسی (MPa)		
محرک	متحرک	ابتدای درگیری	میانه درگیری	انتهای درگیری
استال	استال	۴۷۸/۱	۳۰۳/۲	۲۴۲/۰
نایلون	نایلون	۴۹۳/۹	۲۸۵/۶	۹۸/۷
استال	نایلون	۴۸۲/۳	۲۷۶/۴	۱۸۱/۴
نایلون	استال	۴۷۱/۱	۲۷۸/۶	۱۸۹/۱

بررسی قرار دادند.

### ۳ نتیجه‌گیری

یکی از اصلی‌ترین روش‌های انتقال نیرو میان اجسام، تماس است. اگر دو جسم با سطوح خمیده را به یکدیگر بفشاریم، آن دو در یک نقطه یا در امتداد یک خط تماس، با همدیگر در تماس قرار می‌گیرند و در اثر اعمال نیروهای فشاری تنش‌های سه‌بعدی در دو جسم درگیر گسترش می‌یابد. مسائل تنش‌های تماسی در محدوده وسیعی از کاربردهای مهندسی مانند چرخ‌دنده‌ها، قابل طرح و تحلیل است. چرخ‌دنده‌های

پلیمری به دلیل هزینه تولید کمتر، خود روانکار بودن و صدای کمتر در صنایع ظریف کاربرد به وفور دارد. تنش‌های تماسی ایجاد شده در چرخ‌دنده‌های پلیمری، در تعیین نوع و شدت واماندگی این نوع چرخ‌دنده‌ها نقش به‌سزایی دارد. بنابراین تعیین تنش تماسی در نقاط مختلف درگیری برای پیش‌بینی رفتار چرخ‌دنده تحت بارهای متفاوت حائز اهمیت است. مدل عددی هرگز، روش استاندارد و همچنین روش المان محدود از جمله روش‌های تعیین تنش تماسی هستند. باین‌حال، در بین روش‌های اشاره‌شده، روش المان محدود، قادر به تعیین تنش تماسی در تمام نقاط درگیری جفت دنده است.

## مراجع

1. Johnson K., A Review of the Theory of Rolling Contact Stresses, *Wear*, 9, 4-19, **1966**.
2. Dutt K.A., Soni S., Patel D., Hertzian Contact Stress Analysis in Roller Power Transmission One-way Clutch by Using Finite Element Analysis, *Advanced Engineering Optimization Through Intelligent Techniques*, 621-630, **2020**.
3. He Y., Numerical Simulation-based Optimization of Contact Stress Distribution and Lubrication Conditions in the Straight Worm Drive, *Strength of Materials*, 50, 157-165, **2018**.
4. Hertz H., On the Contact of Rigid Elastic Solids and on Hardness, Chapter 6: Assorted Papers, MacMillan, New York, **1882**.
5. Liu, C.P., Effect of Pre-wear on the Rolling Contact Fatigue Property of D<sub>2</sub> Wheel Steel, *Wear*, 442, 203154, **2020**.
6. Lin Y., Zhou Z., Li K.Y., Improved Wear Resistance at High Contact Stresses of Hydrogen-free Diamond-like Carbon Coatings by Carbon/carbon Multilayer Architecture, *Applied Surface Science*, 477, 137-146, **2019**.
7. Medina R., Deep Learning-based Gear Pitting Severity Assessment Using Acoustic Emission, Vibration and Currents Signals, *2019 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Paris)*, IEEE, **2019**.
8. Wright D.H., Testing Automotive Materials and Components, *Society of Automotive Engineers*, 251- 254, **1993**.
9. Dudley D.W., Handbook of Practical Gear Design, McGraw-Hill Book Company, 656, **1984**.
10. Mohsenzadeh R., Wear and Failure of Polyoxymethylene/calcium Carbonate Nanocomposite Gears, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: *Journal of Engineering Tribology*, 1350650119867530, **2019**.
11. Li J., A Novel Method for Early Gear Pitting Fault Diagnosis Using Stacked SAE and GBRBM, *Sensors*, 19, 758, **2019**.
12. Hassan A.R., Contact Stress Analysis of Spur Gear Teeth Pair, World Academy of Science, *Engineering and Technology*, 58, 597-602, **2009**.
13. Mohsenzadeh R., Gear Life and Failure Mode Versus Meshing Stress in Polyacetal/carbon Black Nanocomposite Gears, *Engineering Failure Analysis*, 131, 105859, **2022**.
14. Mohsenzadeh R., Development of Stress Distribution of Composite Gear Tooth Reinforced by Nano-CaCO<sub>3</sub>, Using Finite Element Analysis and its Correlation with Experience, *Journal of Failure Analysis and Prevention*, 1-9, **2022**.
15. Sukumaran J., Modelling Gear Contact with Twin-disc Setup, *Tribology International*, 49, 1-7, **2012**.
16. Colbourne J.R., The geometry of involute gears, *Springer Science & Business Media*, 173-197, **2012**.
17. Litvin F.L., and Alfonso F., Gear geometry and applied theory, *Cambridge university press*, 251-253, **2004**.
18. Mohsenzadeh R., Soudmand B., and Shelesh-Nezhad K., Failure Analysis of POM Ternary Nanocomposites for Gear Applications: Experimental and Finite Element Study, *Engineering Failure Analysis*, 140, 106606, **2022**.
19. Mohsenzadeh R., Soudmand V., Shelesh-Nezhad K., A Combined Experimental-numerical Approach for Life Analysis and Modeling of Polymer-based Ternary Nanocomposite Gears, *Tribology International*, 107654, **2022**.
20. Mohsenzadeh R., Analysis and Stress Distribution in Polymer Gears, Iran Polymer Technology, *Research and Development*, 2, 71-77, **1399**.
21. Li W., An Investigation on the Wear Behaviour of Dissimilar Polymer Gear Engagements, *Wear*, 271, 2176-2183, **2011**.